

Rădăcinile polinoamelor. Ecuații algebrice de grad superior

Probă de evaluare

Clasa a XII-a A

Clasa a XII-a B

Durata: 50 minute

ITEMI:

Rezolvați sarcinile de lucru de mai jos

Timp de lucru: 50 minute

Se acordă 10 puncte din oficiu

(10p) 1. Fie polinomul $f(X) = 2X^3 - X^2 + 3X + 6$. Calculați: $f(1)$, $f(-1)$, $f(i)$, $f(-i)$.

(10p) 2. Determinați polinomul $f \in \mathbf{R}[X]$ de gradul doi, dacă $f(1) = f(2) = 2$; $f(3) = -2$.

(10p) 3. Determinați $m \in \mathbf{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului f la binomul $X - 1$ este 2, unde $f(X) = X^3 + mX^2 + 2X + m - 1$.

(10p) 4. Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g , dacă:

a) $f(X) = 3X^3 - 2X^2 + 5X + 5$, $g(X) = X - 1$, $f, g \in \mathbf{Z}[X]$;

b) $f(X) = \hat{3}X^5 + \hat{2}X^3 + X^2 + \hat{1}$, $g(X) = X + \hat{1}$, $f, g \in \mathbf{Z}_4[X]$.

(10p) 5. a) Descompuneți în factori ireductibili peste \mathbf{R} , respectiv \mathbf{C} polinomul

$$f(X) = X^3 - 8$$

b) Descompuneți în factori ireductibili polinomul $f \in \mathbf{Z}_5[X]$,

$$f(X) = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{3}$$

(20p) 6. Rezolvați ecuația:

$$X^6 = \frac{1+i}{1-i} \quad (\text{pt cls XII-a A}) \quad X^9 = 1 \quad (\text{pt cls XII-a B})$$

(20p) 7. Rezolvați ecuația:

$$X^3 - 5X^2 + 7X + 13 = 0, \quad (\text{pt cls XII-a A}) \quad X^3 + X + 10 = 0, \quad (\text{pt cls XII-a B})$$

știind că are rădăcina pe $X_1 = 3 + 2i$

știind că are rădăcina $X_1 = 1 - 2i$

Rezolvarea probei de evaluare

1. $f(1) = 2 - 1 + 3 + 6 = 10;$ $f(i) = 2i^3 - i^2 + 3i + 6 = -2i + 1 + 3i + 6 = 7 + i;$
 $f(-1) = -2 - 1 - 3 + 6 = 0;$ $f(-i) = -2i^3 - i^2 - 3i + 6 = 2i + 1 - 3i + 6 = 7 - i.$

2. Fie $f(X) = aX^2 + bX + c.$

$$\begin{aligned} f(1) = 2 &\Rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 1 + c = 2 \\ \bullet f(2) = 2 &\Rightarrow a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = 2 \\ f(-3) = -2 &\Rightarrow a \cdot 9 + b \cdot (-3) + c = -2 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a - 3b + c = -2 \end{cases}$$

• rezolvăm sistemul, considerând ecuațiile două câte două:

$$\bullet \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{cases} \cdot (-1) \Rightarrow \begin{cases} -a - b - c = -2 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{3a + b}{=} = 0$$

$$\bullet \begin{cases} -a - b - c = -2 \\ 9a - 3b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a + 4b = 0 \\ 8a - 4b = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{20a}{=} = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{20}; a = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow -3 \cdot \frac{1}{5} + b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{5}$$

$$-\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + c = 2 \Rightarrow c + \frac{2}{5} = 2; c = \frac{8}{5}$$

$$\bullet f(X) = -\frac{1}{5}X^2 + \frac{3}{5}X + \frac{8}{5}$$

3. $f(1) = 2 \Leftrightarrow 1 + m + 2 + m - 1 = 2 \Rightarrow 2m = 0 \Rightarrow m = 0$

4. Folosim schema lui Horner:

a)

	X^3	X^2	X^1	X^0
	3	-2	5	5
1	3	1	6	11

$$r = 11$$

$$q = 3X^2 + X + 6$$

b)

	X^5	X^4	X^3	X^2	X^1	X^0
	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$

$$X + \hat{1} = 0 \Rightarrow X = \hat{3}$$

$$r = \hat{1}$$

$$q = \hat{3}X^4 + X^3 + X^2$$

5. a) $f(X) = X^3 - 8 = (X - 2)(X^2 + 2X + 4)$ peste \mathbf{R}

$f(X) = X^3 - 8 = (X - 2)[X - (-1 + i\sqrt{3})][X - (-1 - i\sqrt{3})]$ peste C , deoarece

$$X^2 + 2X + 4 = 0; \Delta = 4 - 16 = -12 < 0; X_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

b) $f(X) = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{3}; \quad Z_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$

Folosim schema lui Horner:

	X^3	X^2	X^1	X^0
	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	---
$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$	---

$$X + \hat{4} = 0$$

$$\Rightarrow X + \hat{1} = 0$$

$$X + \hat{2} = 0$$

$$f(X) = (X + \hat{4})(X + \hat{2})(X + \hat{1})$$

6. a) $X^6 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{1-i^2} = \frac{1+2i+i^2}{1-(-1)} = \frac{2i}{2} = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$X_k = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6} = \cos \frac{\pi + 4k\pi}{12} + i \sin \frac{\pi + 4k\pi}{12}, k \in \{0, 1, \dots, 5\}$$

b) $X^9 = 1 = \cos 0 + i \sin 0 \Rightarrow X_k = \cos \frac{2k\pi}{9} + i \sin \frac{2k\pi}{9}, k \in \{0, 1, \dots, 9\}$

7. a) Dacă $X_1 = 3 + 2i$ rădăcină $\Rightarrow \overline{X_1} = 3 - 2i$ rădăcină

▪ fie $f(X) = X^3 - 5X^2 + 7X + 13$

▪ atunci $f : (X - X_1)(X - \overline{X_1}) \Leftrightarrow f : [X^2 - X(X_1 + \overline{X_1}) + X_1\overline{X_1}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow f : (X^2 - 6X + 13)$$

$$\begin{array}{r} X^3 - 5X^2 + 7X + 13 \mid X^2 - 6X + 13 \\ - X^3 + 6X^2 - 13X \quad \mid X + 1 \\ \hline X^2 - 6X + 13 \\ - X^2 + 6X - 13 \\ \hline \\ \end{array}$$

$$X + 1 = 0 \Rightarrow X_2 = -1$$

b) Dacă $X_1 = 1 - 2i$ rădăcină $\Rightarrow \overline{X_1} = 1 + 2i$ rădăcină

▪ fie $f(X) = X^3 + X + 10$

▪ atunci $f:(X - X_1)(X - \overline{X_1}) \Leftrightarrow f:[X^2 - X(X_1 + \overline{X_1}) + X_1\overline{X_1}] \Rightarrow$

$\Rightarrow f:(X^2 - 2X + 5)$

$$\begin{array}{r}
 X^3 \quad \quad + X + 10 \mid X^2 - 2X + 5 \\
 \underline{-X^3 + 2X^2 - 5X} \quad \quad \mid X + 2 \\
 / \quad 2X^2 - 4X + 10 \\
 \quad \underline{-2X^2 + 4X - 10} \\
 \quad \quad / \quad / \quad /
 \end{array}$$

$$X + 2 = 0 \Rightarrow X_2 = -2$$

Interpretarea rezultatelor probei de evaluare:

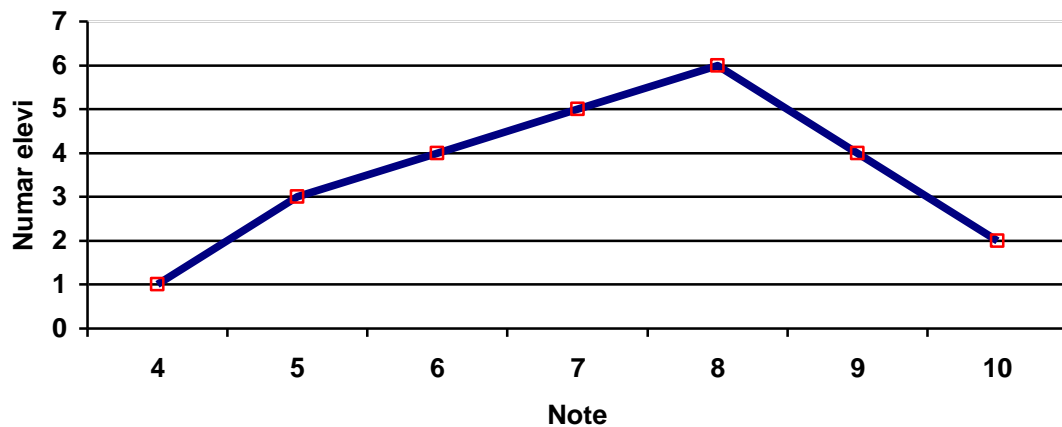
Clasa a XII-a B

Număr elevi: 25

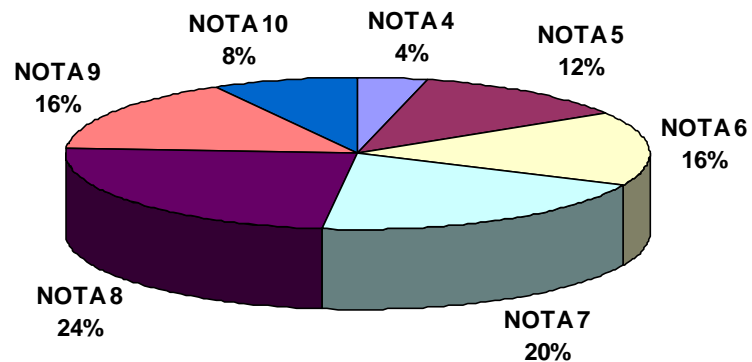
Tabel cu rezultatele obținute la testul de evaluare finală, notele și ponderile acestora:

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Media clasei
Nr. Elevi	-	-	-	1	3	4	5	6	4	2	7,28
%				4	12	16	20	24	16	8	

REZULTATE PRIN NOTE LA CLASA a - XII - a B



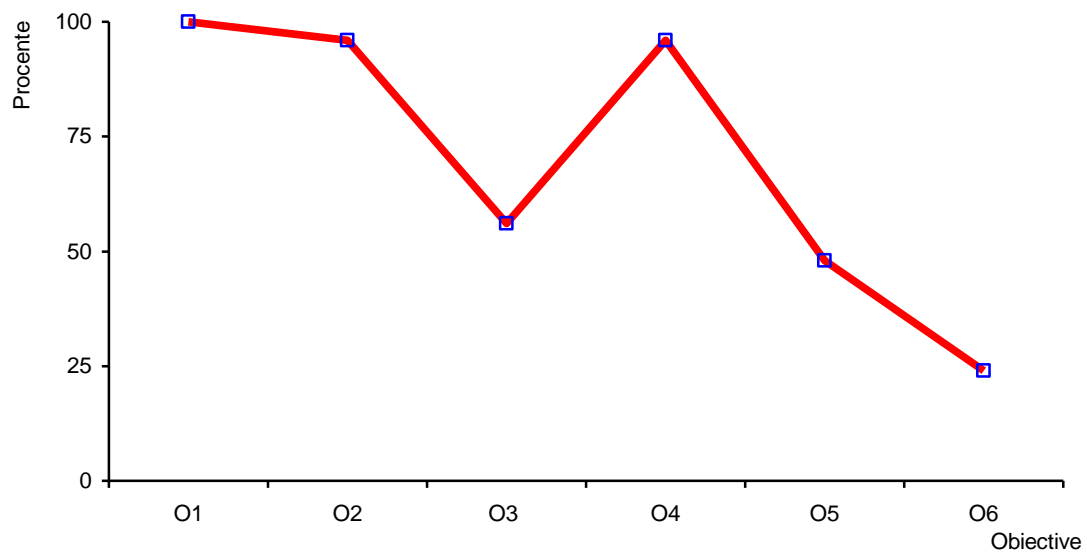
PONDEREA NOTELOR CLASEI a - XII - a B



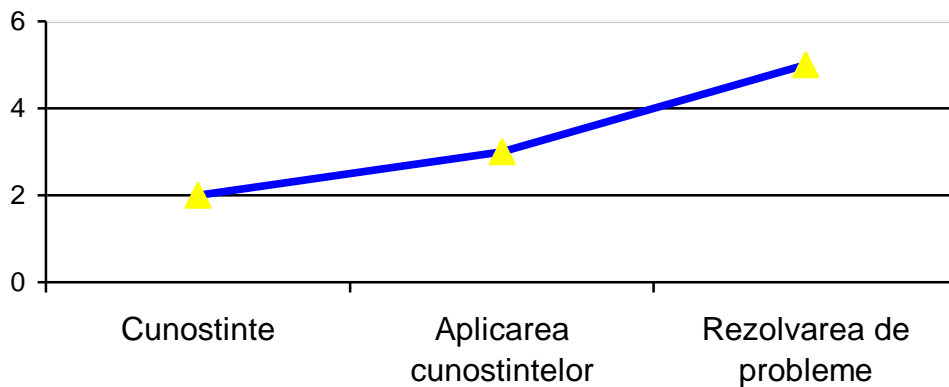
Tabel cu ponderile realizării obiectivelor operaționale la testul de evaluare:

Obiectivul	O1	O2	O3	O4	O5	O6
Nr. Elevi	25	24	14	24	12	6
%	100	96	56	96	48	24

PONDEREA REALIZARII OBIECTIVELOR CLASEI a - XII - a B



EVALUAREA COMPARATIVA A ELEVILOR CLASEI a - XII - a B



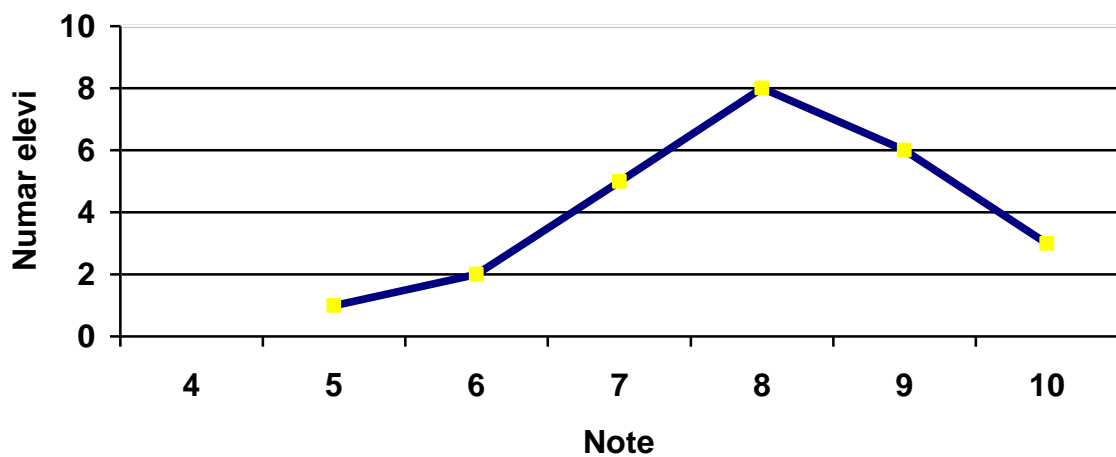
Clasa a XII- a A

Nr. elevi: 25

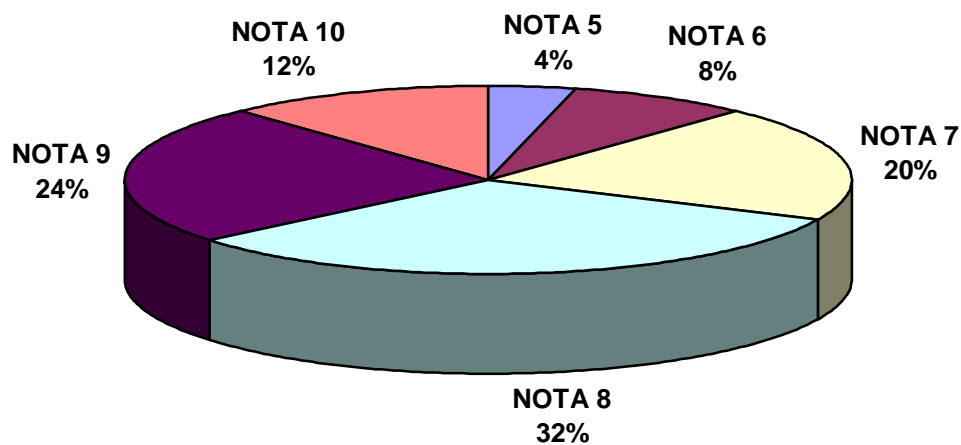
Tabel cu rezultatele obținute la testul de evaluare, notele și ponderile acestora:

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Media clasei
Nr. Elevi	-	-	-	-	1	2	5	8	6	3	8,06
%					4	8	20	32	24	12	

REZULTATE PRIN NOTE LA CLASA a - XII - a A



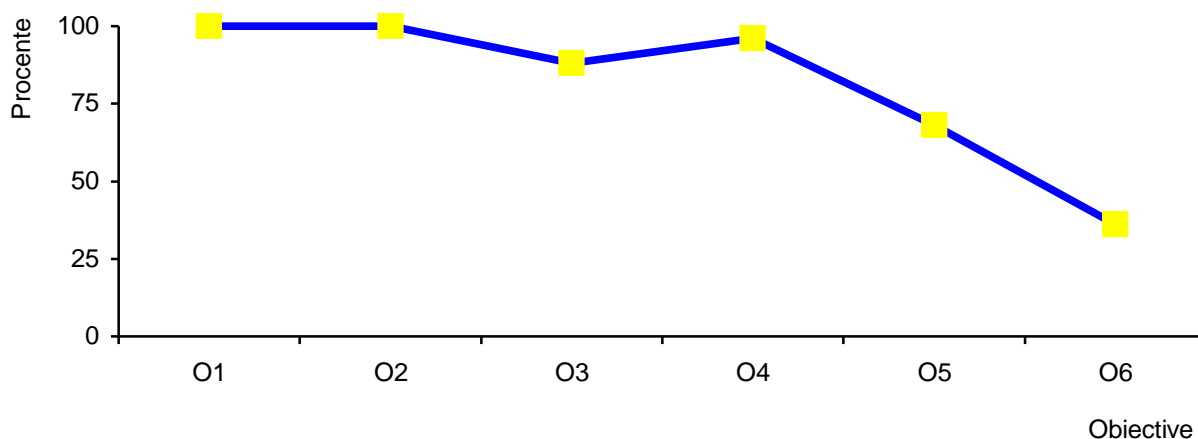
PONDEREA NOTELOR CLASEI a - XII - a A



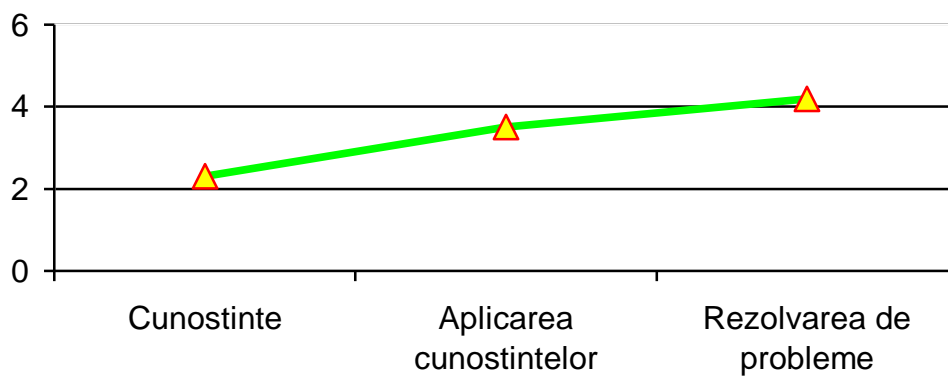
Tabel cu ponderile realizării obiectivelor operaționale la testul de evaluare:

Obiectivul	O1	O2	O3	O4	O5	O6
Nr. Elevi	25	25	22	24	17	9
%	100	100	88	96	68	36

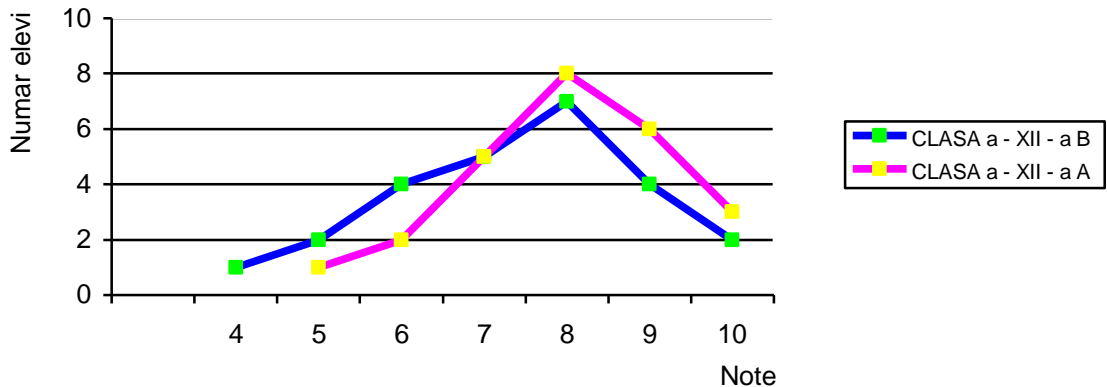
PONDEREA REALIZARII OBIECTIVELOR CLASEI a - XII - a A



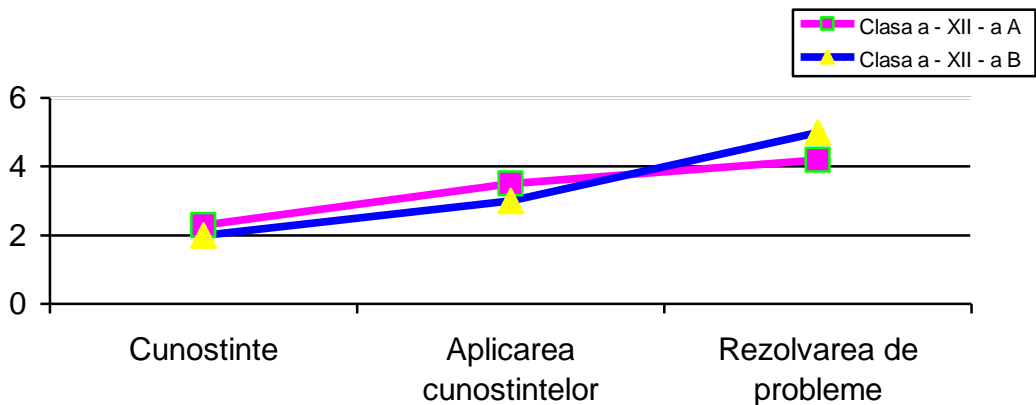
EVALUAREA COMPARATIVA A ELEVILOR CLASEI a - XII - a A



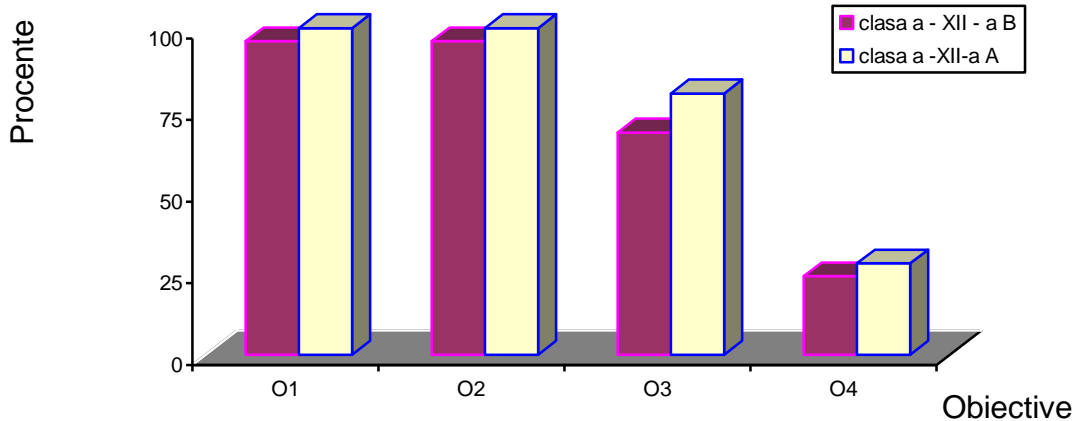
ANALIZA COMPARATIVA A REZULTATELOR PRIN NOTE ALE CLASELOR a - XII - a A si B



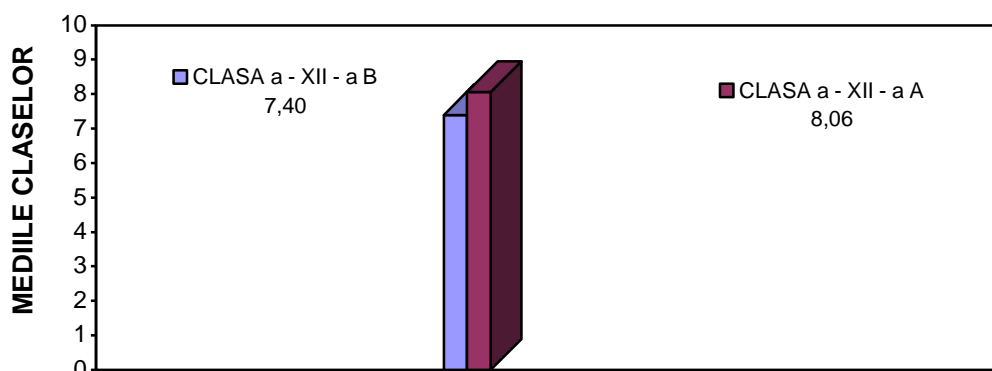
EVALUAREA COMPARATIVA A ELEVILOR CLASELOR a - XII - a A si B



ANALIZA COMPARATIVA A PONDERILOR REALIZarii OBIECTIVELOR CLASELOR a XII-a A si B



ANALIZA COMPARATIVA A MEDIILOR CLASELOR a XII-a A si B



Concluzii:

În urma aplicării probei de evaluare pentru cele două clase s-au înregistrat următoarele rezultate:

- toți elevii au știut să rezolve primele trei aplicații
- un număr de 22 elevi (88%) din clasa a XII-a A au aplicat corect schema lui Horner sau algoritmul de împărțire a două polinoame, iar pentru clasa a XII-a B, un număr de 12 elevi
- de asemenea, un număr relativ mare de elevi au răspuns corect itemului referitor la descompunerea în factori ireductibili pentru polinoamele date
- la ultimii doi itemi au răspuns corect 9 elevi din clasa a XII-a A și 6 elevi din clasa a XII-a B.